



MATEMATICA A

Esercizio 1. Claudia si incontra con le sue amiche Azzurra e Beatrice, e decide di proporre loro un gioco:

- A ognuna di loro consegna, in segreto, un numero della forma $\frac{1}{k}$, con k numero naturale positivo. I due numeri sono diversi, e vince chi ha il numero più alto. Claudia chiede a loro se sappiano chi ha vinto.

Azzurra: Io non lo so.

Beatrice: Non lo so neanche io.

Azzurra: Continuo a non saperlo.

Beatrice: Allora so chi ha vinto!

Azzurra: Adesso lo so anch'io, e so anche che numeri abbiamo!

Chi ha vinto, e che numeri hanno Azzurra e Beatrice?

- Per il secondo round, Claudia consegna a ognuna di loro, in segreto, un numero della forma $n - \frac{1}{k}$, con k e n numeri naturali positivi. I due numeri sono diversi, e vince sempre chi ha il numero più alto. Claudia chiede a loro se sappiano chi ha vinto.

Azzurra: Io non lo so.

Beatrice: Non lo so neanche io.

Azzurra: Continuo a non saperlo.

Beatrice: Non lo so proprio.

Claudia: Guardate, io ve lo dico: per quanto continuate ad andare avanti e indietro così, non lo saprete mai.

Azzurra: Va bene, però io continuo a non sapere chi ha vinto.

Beatrice: Neanch'io.

Azzurra: Aspetta, allora adesso so chi ha vinto!

Beatrice: Adesso lo so anch'io, e so anche che numero hai tu!

Chi ha vinto, e che numeri hanno Azzurra e Beatrice?

Esercizio 2. Nei giochi di ruolo è comune usare dati a più facce, non necessariamente sei. La regola base per costruire tali dadi è che in un dado a n facce la somma dei valori di due facce opposte deve essere $n + 1$.



Non sempre c'è un modo univoco per assegnare i valori alle facce. Per esempio in un dado a 6 facce ci sono due possibili distribuzioni di numeri, a seconda che le facce con i numeri 1, 2 e 3 siano disposte in senso orario o antiorario intorno al loro vertice comune. Quanti sono i possibili tipi diversi di dado a 8 facce, ovvero di dado ottaedrico? Quanti di dado a 12 facce, ovvero di dado dodecaedrico?

Esercizio 3. Dato un intero b , dare la definizione di scrittura in base b di un numero intero e di un numero reale (scrittura con la virgola). Scrivere $\frac{1}{5}$ in base 7. Dire qual è il numero che scritto in base 7 si presenta come: 0,121212....

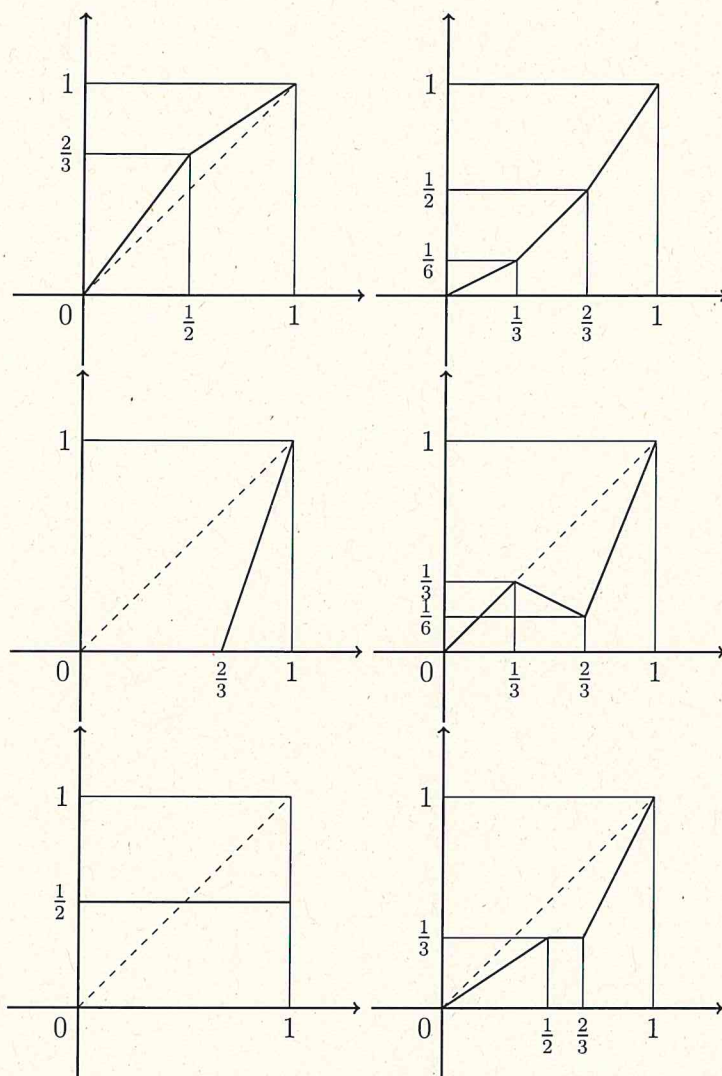
Esercizio 4. Siano a e b numeri reali e n, m numeri naturali positivi tali che $n > m$. Sia $f(x) = x^n + ax^m + b$. Descrivere in modo semplice tutti i casi in cui $f(x)$ è il quadrato di un polinomio, e dimostrare che f può essere il cubo di un polinomio solo se $a = b = 0$.

Esercizio 5. La funzione di Gini studia la distribuzione della ricchezza. È la funzione $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ che a ogni numero x associa la percentuale (normalizzata a 1) della ricchezza posseduta dalla frazione x più povera. Per esempio, $f(x) = x$ è la funzione di Gini in una società totalmente ugualitaria.

Disegnare il grafico della funzione di Gini per le seguenti società:

- Una società divisa in due classi, A e B, ognuna con metà della popolazione, dove tutte le persone nella stessa classe hanno la stessa ricchezza, e le persone di classe A hanno il doppio della ricchezza delle persone di classe B.
- Una società in cui il 10% più ricco possiede metà della ricchezza totale, e la ricchezza fra gli individui di questo 10% è equamente distribuita. Anche la ricchezza nel 90% più povero è equamente distribuita.

Quali dei seguenti grafici possono rappresentare una funzione di Gini? Nei casi positivi, descrivere la relativa società.



Esercizio 6. Nella stampa "Stelle" di M.C. Escher del 1948 compaiono diversi poliedri composti, incluso, in alto a sinistra, un composto di cubo e ottaedro, definito nel seguente modo:

Sia C un cubo di lato di lunghezza l . Consideriamo i punti medi dei suoi spigoli e il poliedro convesso P avente tali punti come vertici (il poliedro P è un cubottaedro). Descrivere l'ottaedro regolare Q tale che $P = C \cap Q$.

Il solido $C \cup Q$ è il composto che stavamo cercando. Determinare il volume di $C \cup Q$.